9 класс

Первый день

9.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равна 2012?

9.2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

9.3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

9.4. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1 + \ldots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равна 2012?

9.2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

9.3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

9.4. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1 + \ldots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1.